

# 図形の面積を求める仕組みを探ろう

～図形面積を求めるアルゴリズムについて～

## <概要>

岐阜県の地図を用いて県の面積の概数を求めることを通して、任意の図形面積を求めるときの基本的な考え方を学ぶとともに、画像ファイルの取扱いの仕方を習得する。さらに、その考え方を定式化してアルゴリズムを組み立てることにより、数学的に記述できる様々な図形面積を、表計算ソフトウェアとプログラミング言語を用いて求める。

<キーワード> 図形, 画像, 面積, アルゴリズム, 求積法

## 1. 学習活動

### (1) 導入 [約2時間]

様々な図形面積を求める人間の営みは、長い歴史をもっている。人間は古代から曲線に囲まれている図形面積を求めると格闘してきた。これが完全に解決されたのは、微分積分学が確立された17・8世紀のことである。この微分積分学の基本的な考え方は「限りなく細かくしてみる」ということであるが、ここではいくつかの図形面積を求めながら、その考えの一端に触れてみる。

まず、岐阜県の地図を利用してその面積を求めてみよう。

課題1 地図上の土地などのような複雑な図形面積を求めるためにはどうすればよいだろうか。また、より正確に求めるためにはどうすればよいだろうか。  
『単位面積の分かっている方眼紙を地図に当てて、その升目を数える。境界線が通過する升目は平均としてその升目の半分の面積とみることが妥当と考えられる。』

課題2 岐阜県の地図と方眼紙を使って、実際に手作業で面積を求めてみよう。  
『一辺の長さが様々の方眼紙を作り、それを地図に当てて数える。』

課題2のような手作業をコンピュータ上で実行してみよう。まず、岐阜県の白地図をスキャナーで画像ファイルとして読み込み、さらに方眼紙をコンピュータ上で作成し、読み込んだ白地図と重ね合わせる。そして画面上

で升目を数えてみる。

### 【実習1】

岐阜県の白地図を読み込む。



図1 岐阜県の白地図

これを画像ファイル(jpgまたはgif)として保存する。

PowerPoint上の、オートシェイプ機能を利用して、方眼紙を作成する。  
(正方形を作成し、コピーペーストで同型の正方形を4つ作り、田形に並べる。以下同様に増やしていく。)

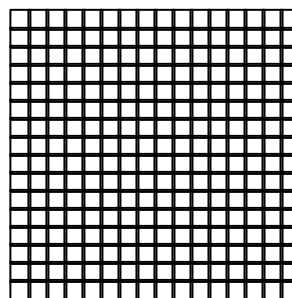


図2 PowerPoint上の方眼紙

スライド上で、白地図と方眼紙を、その順序関係を考慮して重ね合わせる。方眼紙の升目の一边の長さが白地図のスケールに合うように、方眼紙または白地図の大きさを調整する。方眼紙の升目を細かくすることにより、より正確な面積が求まっていくことを体感する。

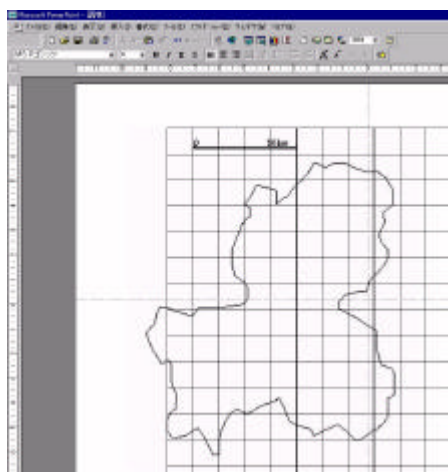


図3 PowerPoint 上での求積

(2) 円の面積を求めてみよう [約4時間]  
最も単純な図形の代表として、円の面積を求めてみよう。

課題3 岐阜県の面積の概数をコンピュータ上で求めた方法と同様の方法で、円の面積の概数を求めてみよう。また、できる限り精度を高めることに挑戦しよう。

【実習2】「PowerPoint 上での円の求積」

PowerPoint のスライド上に適当な半径の円を描く。

実習1で作成した方眼紙を円と重ねる。

方眼紙の1メモリを1として、円の内部に入っている升目の数を数える。

境界線上の升目は1/2として数える。

方眼紙の升目を細かくすることにより、より正確な面積が求まっていくことを体感する。

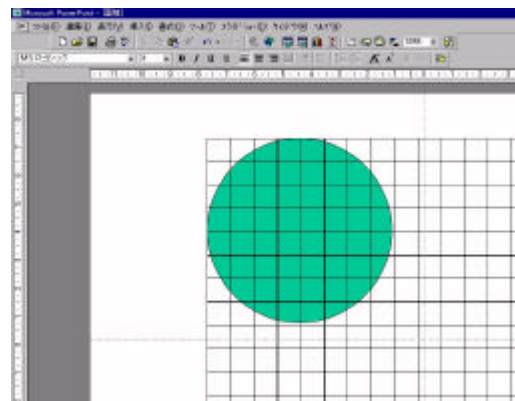


図4 PowerPoint 上での円の求積

次に、今までみてきたような円の求積法を整理し、コンピュータが自動的に処理しやすいような手順に直していこう。面積を求める一般的な考え方は、

図形を、単純な形を持ち、かつその面積が算出可能な細かな図形に分割する。境界に掛かった部分の処理をする。その分割をさらに細かくする。

ということである。ここで、の「単純な形を持ち、かつその面積が算出可能で細かな図形」としては、正方形や長方形が扱いやすい。またの「境界に掛かった部分の処理」として、求める図形の内部に入り込む部分だけを算出の対象とすることが単純である。しかもにより、そのような単純化をしても、その誤差は次第に減少していく。(図5参照)

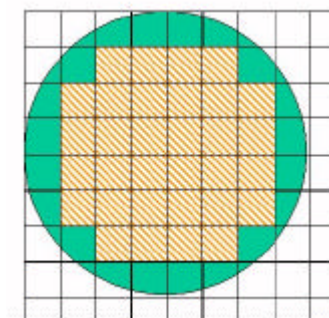


図5 求積法の定式化

このような単純化によって、円の求積の手順を次のように記述し定式化することができる。

円を等間隔の短冊状に切り，円弧の部分  
を切り落とし，長方形に整形する。  
の長方形の面積の和を求める。  
分割を細かくして， を繰り返す。  
所望の精度で求まったら止める。

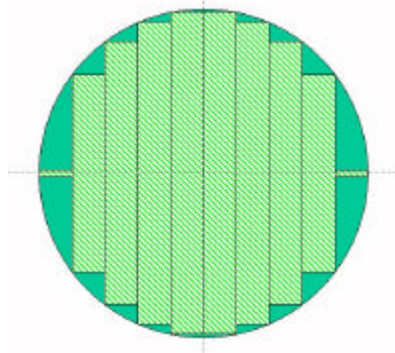


図6 円の求積法の定式化

上記の において，各長方形の面積を求める  
ためには，長方形の縦横の長さを明示しな  
なければならないことが，問題として残っている。  
このことについては，数学の座標を導入する  
ことで解決できる。

数学において，円は座標を用いて表すと  
 $x^2 + y^2 = r^2$  であるから，任意の  $x$  の位置に  
おける  $y$  の値が算出できる。従って円の内部  
にできる長方形の縦横の長さが  $x$  で表現でき  
る。

これを利用して，半径 1 の円  $x^2 + y^2 = 1^2$   
について，求積の手順を数学的に記述すると，  
次のようになる。

$x$  軸上の半径を  $n$  分割する。

その分割点  $x_n$  における円周上の点は

$$y_n = \sqrt{1 - x_n^2}$$

である。また分割点間の幅は  $\frac{1}{n}$   
あるから，長方形一個の面積は

$$\frac{1}{n} 2\sqrt{1 - x_n^2}$$

となる。

$n$  個の長方形について，その面積の  
和を求める。

分割数  $n$  を増やして， を繰り返す。

所望の精度で求まったら止める。

このように，各段階での手順が明確に記述で  
きるようになった。このような一連の仕事の  
流れを明確に記述したものをアルゴリズムと  
いう。

課題4 上記の円の求積についてのアルゴ  
リズムをコンピュータで実行するためには，  
どんなソフトウェアを，どのように  
使えばよいか考えてみよう。

『表計算ソフトウェアを使う方法や簡単な  
コンピュータ言語を使う方法などが考え  
られる。』

### 【実習3】「Excelによる円の求積」

(半径を 10 分割する場合を考える。)

適当な列に分割点の座標を入力する。

(-1, -0.9 を入力し，埋め込み機能を使  
う)

の列の隣に，その分割点における円  
周上の点の  $y$  座標を算出する計算式を  
入力する。

の列の隣に，長方形の面積を求める  
計算式を入力する。

で求めた長方形の面積が入っている  
セルの和を求める。

について，グラフ機能を利用して  
グラフ化してみる。

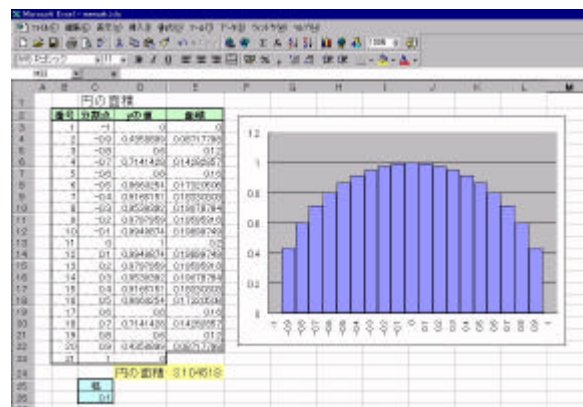


図7 Excel 上での円の求積

課題5 半径 1 の面積は となるはずであ  
るから，上記の実習3において，できる  
限り分割数を多くして，精度の高い円周  
率 の近似値を求めてみよう。

(3) いろいろな曲線で囲まれた図形の面積を求めてみよう [約2時間]

曲線の式が明記できれば、その曲線によって囲まれた図形の面積は、円の求積で考えたようなアルゴリズムを使うことによって求めることができる。

課題6 数学で学んだ曲線を利用して図形を描き、その面積を求めてみよう。  
『たとえば、 $y=x^2$ の区間 $[-1,1]$ でできる図形など』

【実習4】(実習3と同様に、課題6を実行する。)

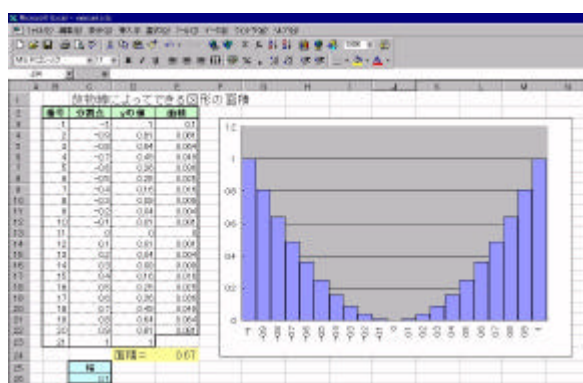


図8 実習4の例

(4) BASICによるアルゴリズムの記述 [約4時間]

アルゴリズムをコンピュータ上で自動化するには、コンピュータ言語によってそれを記述し、実行させればよい。コンピュータ言語では、変数、演算、関数、手続き書式等を組み合わせて記述していくのが一般である。アルゴリズムをコンピュータ言語で記述したものをプログラムという。ここでは、BASIC(JIS Full BASIC)を用いて、その記述方法を学び、アルゴリズムの考え方を深めていく。

前述した円の求積のアルゴリズムを、BASICの文法に合った形式に書き直すと、

変数を定義する。

(円の面積をS, 分割数をN等)

分割数Nに値を入れる。Sを0にする。

端から1番目の長方形について、その一個分の面積を計算する。

面積Sに加算する。

を分割数分だけ繰り返す。

Sを出力する。

のようになる。BASICを使う場合、上記のアルゴリズムに合うプログラミング技法として、FOR NEXT文を用いるか、またはIF文を用いることが考えられる。

FOR NEXT文を用いたプログラム例は、

```
N=100
S=0
FOR X=-1 TO 1 STEP 1/N
S=S+2/N*SQR(1-X^2)
NEXT X
PRINT S
```

となり、IF文を用いたプログラム例は

```
N=100
S=0
X=-1
10 S=S+2/N*SQR(1-X^2)
X=X+1/N
IF X<1 THEN 10
PRINT S
```

となる。

【実習5】「JIS Full BASICでの求積」

JIS Full BASICを起動させる。

上記のプログラム例を記述する。

実行させる。

プログラムの一部を修正して、精度を上げる。

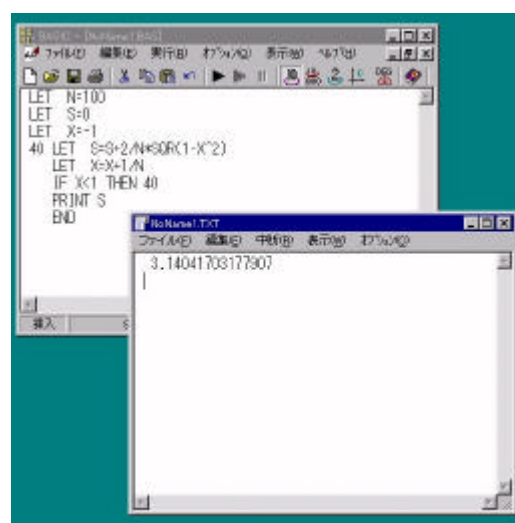


図8 JIS Full BASICでの実行

課題7 円の求積のプログラムを書いて、実行してみよう。またこの中で使われているプログラム技法は何でしょうか。その特徴をみつけてみよう。

『和  $S$  を求めるときに、 $S = S +$  という記述をすることなどがある。』

課題8 課題6の技法を応用して、 $1+2+3+\dots+100$  を求めてみよう。

課題9 JIS Full BASIC について、インターネットで情報を収集し、その文法や記述の仕方を学ぼう。

『例えば <http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/> など』

人間はどのようにしてこの値を求めたのだろうか。人間とコンピュータの思考の違いについて考えてみよう。

## 2 参考サイト

・十進 BASIC のサイト

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

## (5) アルゴリズムとプログラムの評価について [約2時間]

このように、コンピュータ言語を用いてアルゴリズムを記述し実行するとき、アルゴリズムが正しいか否かの検証や使い心地、数値の精度、実行に要する時間などに対する評価をしなければならない。この円の求積のプログラムは、固定した  $N$  に対してのみ計算をするので、 $N$  を任意に取るという汎用性に欠ける。

課題10  $N$  の値を実行時に決められるようにするには、どうしたらようだろうか。

『INPUT 文を使う。』

また、計算の精度についてはどうであろうか。この円の面積は前述したように、であるから、 $N$  を十分に大きくしていけば、

$3.14159265358979323846264338\dots$

となるはずである。

課題11  $N$  を大きくして計算させて、に近づくか検証してみよう。近づかないとすると、その原因はなんだろうか。

『数値の内部表現と誤算の問題(丸め誤差、桁落ち)、アルゴリズムと演算時間の問題(打ち切り誤差)に言及する。』

課題12 半径1の円の面積はであるが、