現象の変化を追跡しよう

～現象と漸化式について～

＜概　要＞
日常の生活，社会，自然界の中で起こっている現象のいくつかを，漸化式を適用して表計算ソフトウェア上でシミュレーションすることを通して，現象のモデル化，アルゴリズム，結果の検証の大切さ等を学ぶとともに，表計算ソフトウェアの使い方の技術を習得する。

＜キーワード＞現象，モデル化，シミュレーション，漸化式，アルゴリズム

1．学習活動

（1）導入［約2時間］

日常の生活，社会，自然界の中で起こっている現象は様々である。これらの現象のメカニズムは複雑であり，どのような仕組みで変化しているのかを解き明かすことは容易ではない。しかし現象の中には，時間と共に刻々と変化していく様子をよく観察すると，その中に潜んでいる仕組みが見えてくるものもある。例えば単純な例として，一定の値で増加または減少しているものや，一定の比率で増加または減少しているものも多々ある。

〈課題１〉一定の値で（等差数列で）変化している現象や，一定の比率で（等比数列で）変化している現象には，具体的にどのようなものがあるだろうか。

ここでは，そのような比較的単純な現象の変化の仕組みを調べてみよう。現象の変化の様子を調べるには実験，観測，観察が必要であるが，もう一つ重要な手法としてシミュレーションがある。シミュレーションとは模擬実験のことであるが，もう少し詳しく言うと，現象の中から変化を引き起こす関係を抽出し，それをコンピュータ上で再現するために記号化し，現象を仮想的に（模擬的に）実行し，その結果を実際の現象と比較検討するという一連の手続きのことである。

（２）一定の値で変化する現象［約３時間］

長さ２０cm のバネがある。このバネは，おもりを１ｇ増やすごとに4㎜ ずつ伸びることが観測されているとする。このとき，おもりを重くしていくとバネの長さはどのようになっていくだろうか。この問題は単純であり，バネの長さを $y$cm，おもりを x ｇとすると，$y = 0.4x + 10$ となることは明らかである。

さて，この問題を視点を変えて考えてみよう。おもりを１ｇ刻みで増加させるとして，n ｇのおもりをぶら下げたときのバネの長さを $x_n$cm とすると，

$$x_{n+1} = x_n + 0.4,\ x_0 = 10$$

と表現できる。この式において，$n = 1,2,3,\cdots$ としていくと x_2, x_3, x_4,･･･が順次算出されていく。この式のように，数字の並び（数列）を生成していく規則を漸化式という。この漸化式で生成される数列をコンピュータ上で実行してみよう。

〈課題２〉これをどのようにしてコンピュータ上で実行するか，考えてみよう。
『まず表計算ソフトウェアを利用する。』

【実習１】

①Excel 上のＡ列をおもり n ｇを表す列とし，順次 A2 = 0，A3 = 1，A4 = 2,･･･を入力する。
②①の隣の列（B 列）をバネの長さ $x_n$cm を表す列とし，B2 に初期の長さ 10 を入力する。
③B3 には，漸化式に相当する計算式+B2 + 0.4 を入力し，以下には式の貼り付け機能を利用して計算式を埋め込む。
④Excel のグラフ機能を利用して，x_n をグラフ化する。

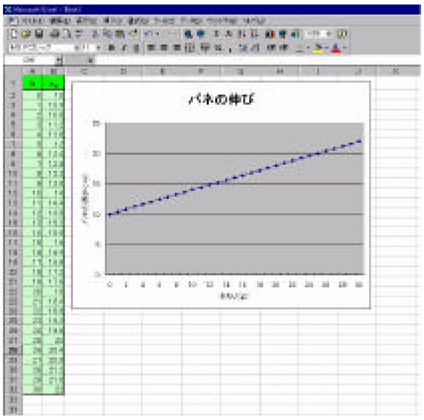


図１　バネの伸び

〈課題３〉一定の値で変化する現象について，他の例を考えて，実習１と同様に実行してみよう。

（３）一定の比率で変化する現象［約３時間］

銀行に貯金をすると，利子がついて次第に増えていく。その増えていく仕組みは，現在の預金高に対して一定の比率（利率）で利子が付くことになっている（複利法）。この例として次のような問題を考える。１００万円を利率 0.05 で貯金すると n 年後の預金高 x_n はいくらになっているだろうか。この問題についても漸化式を立ててみよう。

〈課題４〉この問題の漸化式はどうなるか。

この場合の漸化式は次のようになる。

$$x_{n+1} = x_n + 0.05x_n = 1.05x_n \ , \ x_0 = 1{,}000{,}000$$

【実習２】「銀行預金」

①この漸化式を，実習１と同様にして Excel 上で実行する。

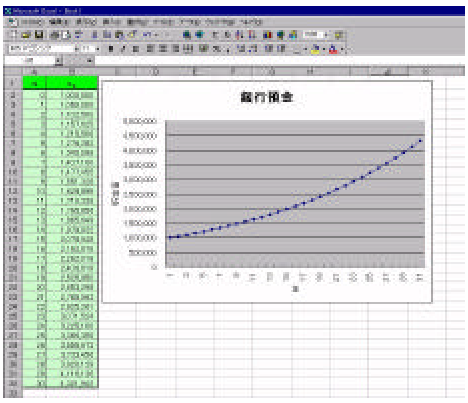


図２　銀行預金

このように，一定の比率で変化する量は指数関数的に変化する。銀行預金のように比率が小さい場合の指数関数は，数年間だけで見るとほとんど直線的な増加と見なすことができるが，長い期間で見ると，増加が急速になっていく。人間の感覚は，直線的な変化には追従できるが指数関数的な変化には追従しにくいと言われている。このことから，実社会ではしばしば悲劇が起こっている。それは銀行預金ではなく借金のような場合に多くあり，借金に利息が付いて想像以上に膨れ上がり，返済できず破産するような事態のことである。

一定の比率で変化する現象は他にも日常しばしば見かける。次に別の例を考えてみよう。楽器を利用して音の高さと弦の長さの関係をみてみる。ヴァイオリンやギターなどの弦楽器は弦が露出しているので，弦の長さが異なれば音の高さが異なることが見た目にも分かりやすい。

〈課題５〉ギターの弦の１本について，開放弦の長さ，第１フレットを押さえたときの長さ，第２フレットを押さえたときの長さ・・・を順次測定してみよう。その長さにはどんな関係があるだろうか。またその関係をコンピュータ上で検証するにはどうすればよいだろうか。

『一定の比率になっている。Excel 上に測定値を入力し，その前後の数値の比をとってみるか，またはそれぞれの数値の対数をとって，その差をみる等。』

【実習３】「測定値の検証」

①Excel のセルに測定値を入力する。
②その値の対数をとる。
③対数の値の差が一定かどうか調べる。
（測定誤差に注意する。）

弦の長さの測定値から，高いドから低いドまでの１オクターブで，その弦の長さが丁度２倍になっていることが分かる。そしてその間の１２の半音階について，弦の長さが一定の比率になっていることも分かる。人間がドからドまでの半音階を聞くとき，その音程が等間隔で並んでいるように聞こえる。しかしその音程の実際の物理量（弦の長さや振動数）

は一定の比率となっている。このことは，人間が物理量の対数の値を感じていると言えるのではないか。

さて，これらの弦についてその長さの比率はいくつであろうか。測定値から算出される比率の概数はすぐにわかるが，正確な値はまだはっきりしていない。その比率を r としておく。高いドの弦の長さを１とすると，１オクターブ内にある半音階に対する弦の長さは，音程の高い方から低い方への順に並べると，

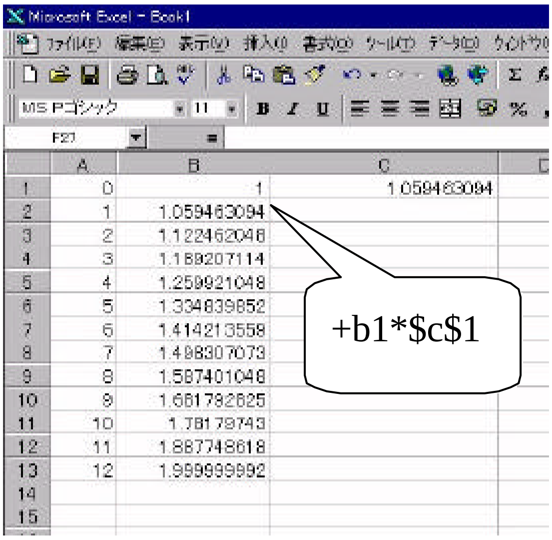
$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7,$
$r^8, r^9, r^{10}, r^{11}, r^{12}= 2$

（ﾄﾞ,ｼ,ﾗ#,ﾗ,ｿ#,ｿ,ﾌｧ#,ﾌｧ,ﾐ,ﾚ#,ﾚ,ﾄﾞ#,ﾄﾞ）

となり，r は２の１２乗根であることがわかる。

〈課題６〉関数電卓を使わずに，表計算ソフトウェアを利用して r の１２乗根を少数７～８桁求めてみよう。

『Excel 上に，比率 r を入れるセル C1 を準備する。B1 に 1, B2 以降の列に+B1*C1, +B2*C1,‥を入力する。C1 に適当な値を順次入れて，B13 が丁度２になるようにしていく。』



	A	B	C
1	0	1	1.059463094
2	1	1.059463094	
3	2	1.122462048	
4	3	1.189207114	
5	4	1.259921048	
6	5	1.334839852	
7	6	1.414213558	
8	7	1.498307073	
9	8	1.587401048	
10	9	1.681792825	
11	10	1.78179743	
12	11	1.887748618	
13	12	1.999999992	

図３　２の１２乗根を求める

このことから r は 1.059463094‥であることが分かる。この比率 r を使って弦の長さについての漸化式を記述すると，高いドの弦の長さを１として

$x_{n+1} = rx_n$, $x_0 = 1$ （ $r = 1.059463094‥$ ）

で表される。

【実習４】「音階と弦の長さ」

①この漸化式を，実習１と同様にして Excel 上で実行する。

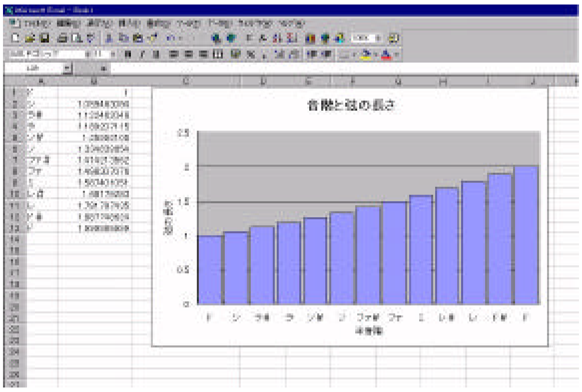


図４　音階と弦の長さ

（４）変化量がそのときの全体量に比例する現象［約３時間］

ある時点での量が x_n であり，次の時点での量が x_{n+1} となったとすると，その差 $x_{n+1}-x_n$ がこの現象の変化量である。様々な現象の中には，この変化量がそのときの x_n に比例するという仕組みで変化する現象がある。例えば，人口の増加する仕組みを考えてみよう。ある時点での人口を x_n とする。このとき，人口の変化量 $x_{n+1}-x_n$ は何に比例すると考えられるだろうか。変化量は増加した子供の数から死亡した人間の数を引いたものであるが，それらの数は，人口が多ければ多く，少なければ少なくなると考えられるので，人口に比例していると考えられる。以上より，人口の変化量 $x_{n+1}-x_n$ は，そのときの人口に比例すると考えることができる。人口がこのようなモデルに従うとすると漸化式は

$x_{n+1}-x_n = \alpha x_n$ （αは比例定数）

すなわち

$x_{n+1} = (1+\alpha)x_n$

であるから，一定の比率 1+αで増加する現象となることが分かる。このことから，人口は指数関数的に増加することになる。

しかしこのモデル化には欠陥がある。それは，その他の要因で人口の増加に抑制がかかることを見落としている点である。例えば食料の問題，環境汚染の問題等の制約により，

地球が養い得る人口の最大値が見積もられている。その最大許容人数を N とすると，現在の人口との差，つまりあと何人養えるかという人数 $N - x_n$ が大きいほど，まだたくさんの人間を養うことができるので人口の増加も大きく，また少ないほど，もうあまり養うことができず人口の増加は鈍ってくることになる。従って，人口の増加もこの量に比例することになる。以上の考察から変化量 $x_{n+1} - x_n$ は x_n にも，$N - x_n$ にも比例するということである。このことから漸化式は,

$x_{n+1} - x_n = \boldsymbol{k} x_n (N - x_n)$ （k は比例定数）

になる。ここで比例定数は，実際の観測に合致させるように設定する定数である。

【実習５】「増加に制限がある人口増加」

①この漸化式を，実習１と同様にして Excel 上で実行する。

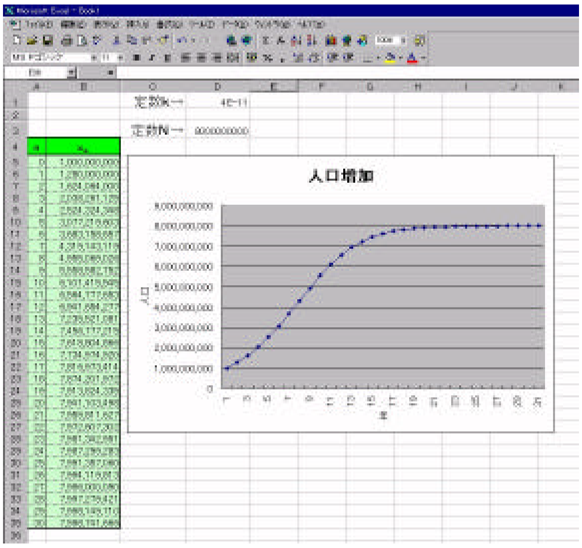


図５　人口増加