

# ハンバーグとオムレツをいくつ作る？

～線形計画法のアルゴリズムについて～

## <概要>

ファミリーレストランでの利益を最大にする問題をコンピュータ上で解くことを通して、問題解決へのアルゴリズムを学ぶとともに、表計算ソフトウェアの使い方を習得する。

<キーワード>線形計画法，最大化，最小化，最適化，アルゴリズム，表計算

## 1. 学習活動

### (1) 導入・問題提示 [約2時間]

日常生活や経済活動などの問題の中で、ある量を最大にしたり最小にしたりするにはどうすればよいかという最適化問題がしばしば出てくる。例えば、家庭や企業でのエネルギー使用量を最小にするにはどうすればよいか、利潤を最大にするにはどうすればよいかなど、枚挙にいとまがない。ここでは次のような問題について、ファミリーレストランの経営者になったつもりで考えてみよう。

「あるファミリーレストランでは、ハンバーグを1個作るのに牛肉300g，玉ねぎ100g，オムレツを1個作るのに牛肉200g，玉ねぎ200gを使っている。

冷蔵庫の中には牛肉が6kg，玉ねぎが4kgある。ハンバーグ1個で8円，オムレツ1個で7円の利益があるとき，ハンバーグとオムレツをそれぞれいくつ作れば，利益が最大になるでしょうか。」

この問題に対して，以下の手順に沿って解決の糸口を探っていこう。

課題1 上の問題で，ハンバーグを  $x$  個，オムレツを  $y$  個作るとする。ハンバーグだけ，あるいはオムレツだけで作るとすると，それぞれ最大いくつまで作れるだろうか。

『牛肉の制約から， $x$  は20個まで， $y$  は30個までである。また玉ねぎの制約から  $x$  は40個， $y$  は20個までである。』

課題1より  $x, y$  の取りうる値の範囲はわかったが， $x, y$  は独立ではなく， $x$  の値に関連して  $y$  の値が影響を受ける（その逆もある）。このような  $x, y$  の複雑な関係を，表を利用して調べてみよう。

課題2  $x, y$  の関係を調べるために，どのようにすればよいだろうか。まず  $x, y$  に対して牛肉の使用量を表にしてみよう。次に玉ねぎについても同様に表を作ってみよう。

『方眼紙を利用して  $x, y$  の関係を探る。牛肉と玉ねぎのそれぞれについて，升目に入量を入れていく。この表から，牛肉と玉ねぎの総量の制約からくる  $x, y$  の関係を探る。』

牛肉の使用量について

6	1200	...	...	...	...	...	...
5	1000	...	...	...	...	...	...
4	800	...	...	...	...	...	...
3	600	800	1200	...	...	...	...
2	400	700	1100	1300	...	...	...
1	200	900	800	1100	1400	1700	2000
0	0	300	600	900	1200	1500	1800

玉ねぎ  
ハンバーグ

図1 手作業で表を埋めていく

作成した牛肉の使用量と玉ねぎの使用量についての表から，牛肉と玉ねぎの総量が決まっているので， $x, y$  の取りうる値は表の中のあ

る一部分（領域）に限られることがわかる。さらに、牛肉の使用量と玉ねぎの使用量の領域を重ねてみたとき、重なりあった領域が、 $x,y$  のとりうる値の範囲を示した領域である。このような表を利用することは、 $x,y$  を対にして考える上で大変便利であり、またこのことを発展させると、数学の座標の概念につながっていく。この表の升目は座標の格子点に対応することになる。

**(2) この問題をコンピュータ上でやってみよう [約4時間]**

(1) で行った方法は、表の升目に同じような計算を繰り返し行うことになり大変面倒である。ここでは、このような手作業をコンピュータ上でやってみよう。

**課題3** このような手作業をコンピュータ上で実行するには、どのような方法が考えられるだろうか。

『Excel上のセルを升目に見立てて考える。』

**【実習1】「牛肉と玉ねぎの使用量」**

Excel上に上記の表を作成する。  
 (このとき、数学の座標の表現に合わせて、セルの列を下から上に向かって0, 1, 2, ...となるように表を設計する)  
 表のセルへ計算式を入れて、それぞれの使用量が自動計算できるようにする。  
 (B1のセルに、 $300 * \$b\$32 + 200 * a1$ を入力して、縦の列のセルにコピーをする。)  
 牛肉の総量を超えない範囲のセルに色を付ける。  
 玉ねぎについても、同様に作成する。

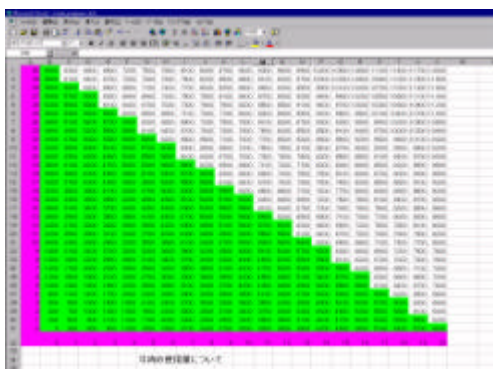


図2 Excel上での牛肉の使用量

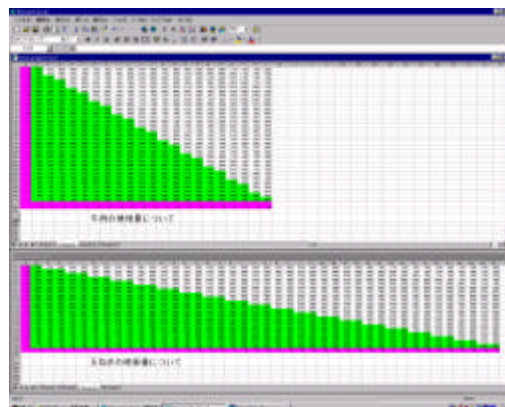


図3 2つの領域

**課題4** 牛肉の使用量と玉ねぎの使用量の領域を見比べて、二つの領域の重なり合った部分を探してみよう。

この二つの領域の重なり合った部分が、 $x,y$  のとりうる値の範囲を示した領域である。

**【実習2】「共通の領域」**

Excelの別のワークシート上に、実習1で作成した2つの領域の共通部分に相当する領域のセルに色を付ける。

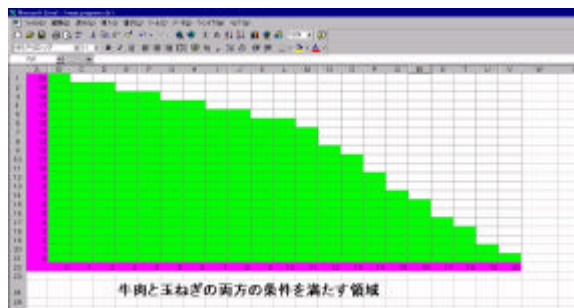


図4 二つの領域の重なった部分（共通部分）

**(3) 利益を最大にするのは？ [約3時間]**

以上から、 $x,y$  のとりうる値の範囲（領域）が視覚的に表現できた。この図から、例えばハンバーグを6個作ると牛肉と玉ねぎの総量の制約から、オムレツは17個までしか作れない、というようなことが読みとれる。

さて、ハンバーグとオムレツを完売したとき、その利益はいくらだろうか。この問題ではハンバーグが1個につき8円、オムレツが1個につき7円の利益があるから、合計  $6 \times 8 + 17 \times 7 = 167$  円の利益がある。すなわちハンバーグ  $x$  個、オムレツ  $y$  個を完売し

たとき、利益は  $8x + 7y$  で表される。

課題5 図4の領域内のセルについての利益を算出するには、どうすればよいだろうか。また利益を最大にするような  $x, y$  を探す工夫を考えてみよう。

### 【実習3】

実習2で作成した領域のすべてのセル内に、利益が算出できる計算式を作成する。

(例えば、 $x = 3, y = 5$  に対応するセルには  $8 * E22 + 7 * A5$  を入れる。)

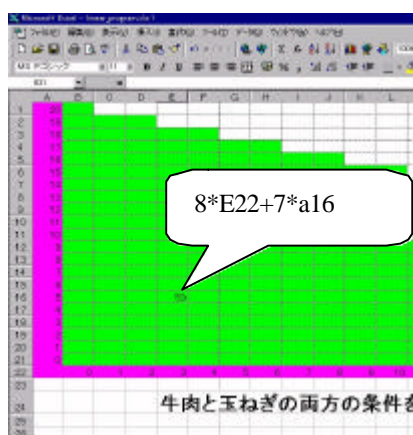


図5 利益を算出する計算式

領域内の利益の値を、グラフ機能を利用して3Dグラフ化する。表示されたグラフの各種設定を変更して、見やすいグラフにする。グラフから最大となっている点を探す。

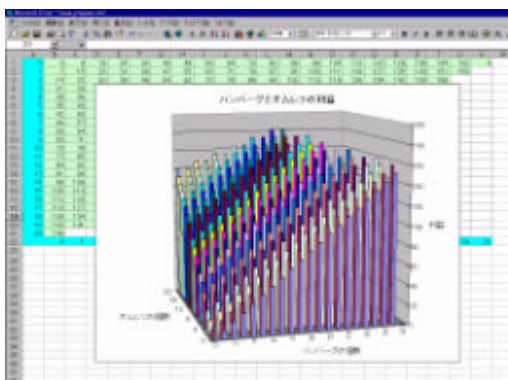


図6 利益のグラフ化

(領域の天地を逆にした方がグラフ化しやすい。数学の座標軸の方向とワークシー

トのセル番号の付け方が、 $y$  軸方向で逆になっていることに注意する。)

このようにグラフ化することにより、それぞれの  $x, y$  に対する利益の状態がよく分かる。この中で最大の利益をとるような  $x, y$  を読みとると、 $x = 11, y = 14$  となっていることが分かる。

### (4) 領域内の点に対する評価関数について [約2時間]

今まで見てきたように、ある領域内の点  $x, y$  に対して、 $8x + 7y$  (ここでは利益) で算出される量を、評価関数ということにする。一般に、ある領域内の点  $(x, y)$  に対して、 $f(x, y)$  のことを、点  $(x, y)$  の評価関数という。

この評価関数の式を変えることにより、その評価関数に様々な意味を持たせることができる。例えば、上記の領域をある町の地図とみなし、 $x, y$  を km であるとする。ここで、この町の役場が  $(5, 5)$  にあるとして、そこから各地点(格子点)までの距離を測るには、

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

とすればよい。

### 【実習4】

上記で作成した Excel 上の領域内のセルに、原点からの距離を算出する計算式を入力する。

グラフ機能を利用して、3Dグラフ化をする。

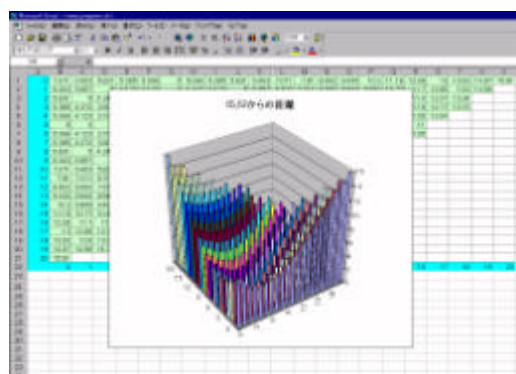


図7 各地点の(5, 5)からの距離

このように、領域内の点に対する評価関数を変えることにより、様々な量について調べることができる。